



## H-Correction

Houman Borouchaki, Frédéric Hecht, Pascal Frey

### ► To cite this version:

Houman Borouchaki, Frédéric Hecht, Pascal Frey. H-Correction. [Rapport de recherche] RR-3199, INRIA. 1997. inria-00073490

**HAL Id: inria-00073490**

**<https://inria.hal.science/inria-00073490>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

## ***H-Correction***

Houman BOROUCHAKI, Frédéric HECHT  
et Pascal J. FREY

**N° 3199**

27 juin 1997

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_

 ***apport  
de recherche***  




## H-Correction

Houman BOROUCI<sup>\*</sup>, Frédéric HECHT<sup>†</sup>  
et Pascal J. FREY<sup>‡</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3199 — 27 juin 1997 — 30 pages

**Résumé :** Ce rapport présente une procédure pour borner la variation en taille d'un espace de contrôle. Ce dernier représente les spécifications en taille au voisinage de chaque point de l'espace ( $R^2$  ou  $R^3$ ) et sert à gouverner la génération de maillage dans un procédé d'adaptation de maillages. Le schéma proposé consiste à remplacer l'espace initial par un espace réduit en termes de taille et permet d'accélérer la convergence du procédé d'adaptation et d'améliorer, a priori, la qualité du maillage adapté. Quelques exemples montrent l'efficacité de la procédure de réduction.

**Mots-clé :** maillage, maillage anisotrope, maillage de surface, adaptation de maillage.

*(Abstract: pto)*

<sup>\*</sup> Université de Technologie de Troyes – [houman.borouchaki@univ-troyes.fr](mailto:houman.borouchaki@univ-troyes.fr)

<sup>†</sup> [Frederic.Hecht@inria.fr](mailto:Frederic.Hecht@inria.fr)

<sup>‡</sup> [Pascal.Frey@inria.fr](mailto:Pascal.Frey@inria.fr)



# H-Correction

**Abstract:** This paper introduces a procedure to bound the size variation in a control space. The latter represents the size specifications in the neighborhood of each point of the space ( $R^2$  or  $R^3$ ) and is used to govern the mesh generation in an adaptive process. The proposed scheme consists of replacing the initial control space by a reduced one in terms of size. It allows to improve, a priori, the quality of the adapted mesh and to speed up the adaption procedure. Several numerical examples show the efficiency of the correction scheme.

**Key-words:** Meshing, Anisotropic mesh generation, Surface meshing, Mesh adaption.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Maillage adapté à un espace de contrôle</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>H-variation, H-choc et H-correction</b>	<b>6</b>
3.1	Variation en taille . . . . .	7
3.2	Correction en taille . . . . .	9
3.2.1	Hv-correction . . . . .	10
3.2.2	Hc-correction . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Exemples</b>	<b>14</b>
4.1	Exemples de maillages plans . . . . .	14
4.1.1	Exemple 1 . . . . .	15
4.1.2	Exemple 2 . . . . .	18
4.1.3	Exemple 3 . . . . .	19
4.1.4	Exemple 4 . . . . .	22
4.2	Exemple de maillages surfaciques . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

# 1 Introduction

Une procédure d'adaptation de maillage consiste à construire un maillage initial du domaine considéré, à établir une carte de tailles ou de métriques associée aux sommets de ce maillage initial et à générer un nouveau maillage respectant la carte spécifiée (voir par exemple [10], [7] et [3]). Cette dernière est en général le résultat d'un estimateur d'erreur (cf. [8] et [11]). L'erreur est déterminée soit sur la solution d'un calcul par éléments finis sur le maillage initial, soit sur l'adéquation du maillage avec la géométrie du domaine (dans le cas d'un maillage surfacique). Deux problèmes se posent naturellement,

- est-il toujours possible de générer un maillage adapté (repectant les spécifications de l'espace de contrôle)?
- le maillage adapté respecte-t-il aussi les requis en forme d'élément pour le maillage (de type éléments finis)?

Le premier problème est posé dans le cadre d'une variation trop importante en taille ou en métrique dans l'espace de contrôle, voire même d'une variation discontinue. Dans ce cas, on ne peut générer qu'un maillage localement adapté. Quant au deuxième problème, la variation de tailles ou de métriques est aussi importante mais on peut quand même générer un maillage globalement adapté. Dans ce cas, on s'intéresse à la qualité en forme des éléments (la forme optimale étant celle de l'élément équilatéral relatif à l'espace de contrôle).

Une solution *naturelle* à ces problèmes est de corriger la carte de spécifications. Deux approches sont possibles qui consistent à remplacer chaque métrique

- soit par une métrique proportionnelle (qui conserve la forme de la boule unité associée à la métrique initiale),
- soit par une métrique dont la boule unité associée est incluse dans celle associée à la métrique initiale.

Dans les deux cas, la méthode réduit la métrique initiale, dans le sens où les spécifications en tailles sont plus petites que celles d'origine (suivant toutes les directions).

On se propose d'indiquer ce qu'il est possible de faire en suivant les deux approches de réduction. Pour ce faire, on rappelle, Section 2, la notion de maillage adapté à un espace de contrôle. En Section 3, on introduit les notions de H-variation et de H-choc<sup>1</sup> d'un espace de contrôle et on présente deux procédures de correction. Des exemples de maillages plans et surfaciques adaptés, sans et avec correction, sont donnés en Section 4. Enfin, une rapide conclusion fait l'objet de la dernière section.

## 2 Maillage adapté à un espace de contrôle

Dans cette section on rappelle la notion de maillage *adapté* à un espace de contrôle ou à une carte de métriques.

Soient  $\Omega$  un domaine de  $R^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ) et  $\mathcal{M}_d(\Omega)$  un champ *continu* de métriques associé aux points de  $\Omega$ . La métrique en un point de  $\Omega$  caractérise la taille souhaitée des arêtes ou des éléments au voisinage de ce point. En normalisant les tailles souhaitées à *un*, la métrique en un point  $P$  de  $\Omega$  peut être définie par une matrice symétrique définie positive d'ordre  $d$ , désignée par  $\mathcal{M}_d(P)$  et donnée en deux dimensions par

$$\mathcal{M}_2(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) \\ b(P) & c(P) \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec  $a(P) > 0$  et  $a(P)c(P) - b^2(P) > 0$  et en trois dimensions par

$$\mathcal{M}_3(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) & c(P) \\ b(P) & d(P) & e(P) \\ c(P) & e(P) & f(P) \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec  $a(P) > 0$ ,  $a(P)d(P) - b^2(P) > 0$  et  $\text{Det}(\mathcal{M}_3(P)) > 0$ , où  $\text{Det}$  désigne le déterminant. Avec cette définition de métrique, les requis en taille au voisinage d'un point  $P$  de  $\Omega$  peuvent se traduire par l'équation

$${}^t\overrightarrow{PX} \mathcal{M}_d(P) \overrightarrow{PX} = 1, \quad (3)$$

où  $PX$  représente une arête issue de  $P$ . Le lieu géométrique des points  $X$  vérifiant cette équation est généralement un ellipsoïde désigné par  $\overline{\mathcal{M}_3(P)}$ .

---

1. H désignant la taille.

Ce dernier représente une approximation<sup>2</sup> de la boule unité en  $P$ . Le couple  $(\Omega, \mathcal{M}_d(\Omega))$  définit une structure *Riemannienne* sur  $\Omega$  et est appelé *espace continu de contrôle*.

En pratique, le champ continu  $\mathcal{M}_d(\Omega)$  de métriques est défini par interpolation sur un *espace discret de contrôle*. Ce dernier est en général composé d'un maillage  $T(\Omega)$  de  $\Omega$ , appelé *maillage de fond*, et d'un champ *discret* de métriques  $\mathcal{M}_d(T(\Omega))$  associé aux sommets de  $T(\Omega)$  et est désigné par  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$ . Le maillage de fond, qui est une décomposition simpliciale du domaine, sert alors, par interpolation (linéaire, géométrique ou autre), à rendre continu le champ discret de métriques.

Un maillage de  $\Omega$  adapté à l'espace de contrôle  $(\Omega, \mathcal{M}_d(\Omega))$  est un maillage dont toutes les arêtes ont une longueur *unité* par rapport à la structure Riemannienne associée. Ce maillage est aussi appelé *maillage unité* de  $\Omega$  via la structure. La longueur d'une arête  $PQ = (P + t\overrightarrow{PQ})_{0 \leq t \leq 1}$  du maillage de  $\Omega$  est donnée par la relation

$$l(PQ) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ} \mathcal{M}_d(P + t\overrightarrow{PQ}) \overrightarrow{PQ}} dt \quad (4)$$

où  $\mathcal{M}_d(P + t\overrightarrow{PQ})$  est la métrique au point  $P + t\overrightarrow{PQ}$  de l'arête.

Un maillage unité est un maillage de bonne *qualité en taille* par rapport à l'espace de contrôle associé. Ce maillage ne vérifie pas nécessairement les requis demandés en termes de qualité en forme. En effet, cette dernière dépend non seulement de la longueur des arêtes des éléments, mais aussi de leurs volumes (cf. [2]). On appelle *maillage équilatéral*, un maillage unité de bonne *qualité en forme*.

### 3 H-variation, H-choc et H-correction

Considérons l'espace discret de contrôle  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$ . On s'intéresse, en analysant cet espace, à déterminer localement la variation en taille dans le domaine  $\Omega$ . Il est évident que l'on ne peut pas construire un maillage adapté

---

2. On suppose que la métrique est constante dans un voisinage adéquat de  $P$ .

équilatéral si la variation en taille est importante. En effet, si la taille varie trop au voisinage d'un point, le degré de ce point<sup>3</sup> est élevé et par conséquent le volume des éléments connectés à ce point est petit par rapport au volume de l'élément idéal et ainsi la qualité du maillage est dégradée en ce point. Dans cette section, on montre comment on peut estimer localement la variation en taille sur l'espace  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$  et comment on peut apporter une correction *raisonnable* (sans trop perturber le champ de métriques) à  $\mathcal{M}_d(T(\Omega))$  pour borner cette variation.

### 3.1 Variation en taille

La variation en taille peut être quantifiée de deux manières différentes. La première consiste à la définir en tant que *gradient* de la fonction taille spécifiée par l'espace de contrôle, alors que la seconde, définit la variation par le *rapport* des longueurs de couples d'arêtes adjacentes. Dans un premier temps, ces mesures sont définies dans un contexte isotrope, puis généralisées au cas anisotrope.

Dans le cas où le champ de métriques est isotrope, la métrique en un point  $P$  peut s'exprimer comme

$$\mathcal{M}_d(P) = \frac{1}{h^2} I_d, \quad (5)$$

où  $I_d$  est la matrice identité et  $h(P)$  la taille souhaitée en  $P$ . En effet l'équation (3) est réduite à  $\|\overrightarrow{PX}\| = h(P)$ . La longueur d'une arête  $PQ$  du maillage de fond peut s'écrire alors comme

$$l(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt \quad (6)$$

où  $h(t)$  est une fonction monotone d'interpolation vérifiant  $h(0) = h(P)$  et  $h(1) = h(Q)$ . Cette fonction est en effet celle qui permet de passer de l'espace de contrôle discret à l'espace de contrôle continu. Pour fixer les idées, considérons l'interpolation en taille correspondant à une progression géométrique définie par

$$h(t) = h(P) \left( \frac{h(Q)}{h(P)} \right)^t. \quad (7)$$

---

3. le nombre d'éléments ou d'arêtes connectés à ce point.

On obtient alors, si  $h(P) \neq h(Q)$

$$l(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \frac{h(Q) - h(P)}{h(P)h(Q) \log \frac{h(Q)}{h(P)}} \quad (8)$$

et si  $h(P) = h(Q)$

$$l(PQ) = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{h(P)}. \quad (9)$$

**Définition.** La *H-variation*  $v(PQ)$  relative à une arête  $PQ$  de  $T(\Omega)$  correspond à

$$v(PQ) = \frac{|h(Q) - h(P)|}{\|\overrightarrow{PQ}\|}. \quad (10)$$

Cette définition, coïncide avec le gradient de la fonction d'interpolation  $h$ , si  $Q$  tend vers  $P$  et donc représente une approximation discrète de celui-ci.

**Définition.** Le *H-choc*  $c(PQ)$  relatif à une arête  $PQ$  de  $T(\Omega)$  est le rapport

$$c(PQ) = \max \left( \frac{h(Q)}{h(P)}, \frac{h(P)}{h(Q)} \right)^{\frac{1}{n(PQ)}}. \quad (11)$$

Cette quantité représente la gradation en taille sur l'arête  $PQ$  et mesure la distorsion de la fonction d'interpolation  $h$  sur  $PQ$ .

La H-variation (resp. le H-choc) varie dans l'intervalle  $[0, \infty[$  (resp.  $[1, \infty[$ ). Ces mesures peuvent être définies aux sommets de  $T(\Omega)$ , en considérant les mesures relatives aux arêtes incidentes. Plus précisément, la H-variation  $v(P)$  (resp. le H-choc  $c(P)$ ) au sommet  $P$  de  $T(\Omega)$  est le maximum des H-variations (resp. H-chocs) des arêtes incidentes à  $P$ ,

$$v(P) = \max_Q v(PQ) \quad c(P) = \max_Q c(PQ), \quad (12)$$

où  $Q$  parcourt l'ensemble des extrémités des arêtes incidentes à  $P$ .

On obtient ainsi une carte de ces mesures associées aux sommets du maillage de fond. En interpolant cette carte discrète sur le maillage de fond, on obtient

une estimation de variation de taille en tout point du domaine  $\Omega$ . Par définition, la H-variation (resp. le H-choc) de l'espace de contrôle  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$  est la H-variation (resp. le H-choc) d'amplitude maximale aux sommets de  $T(\Omega)$ .

Considérons le cas général d'un champ anisotrope de métriques. Pour évaluer la variation en taille sur une arête  $PQ$  de  $T(\Omega)$ , on considère la spécification en taille dans une seule direction, en particulier la direction  $\overrightarrow{PQ}$ . Ceci permet de se ramener au cas isotrope introduit précédemment, au moyen d'une approximation très grossière. Ainsi on associe des tailles à  $P$  et à  $Q$ , représentant la longueur unité suivant la direction  $\overrightarrow{PQ}$  au voisinage de  $P$  et de  $Q$ , et on applique les formules correspondant au cas isotrope. Il s'agit simplement de trouver le point  $P_1$  (resp.  $Q_1$ ) sur la droite support de  $PQ$  appartenant à  $\overline{\mathcal{M}_d(P)}$  (resp.  $\mathcal{M}_d(Q)$ ) vérifiant ainsi  $P_1 = PQ \cap \overline{\mathcal{M}_d(P)}$  (resp.  $Q_1 = QP \cap \mathcal{M}_d(Q)$ ) et d'imposer  $h(P) = \|\overrightarrow{PP_1}\|$  et  $h(Q) = \|\overrightarrow{QQ_1}\|$ . L'expression de la H-variation est similaire au cas isotrope, alors qu'en approchant  $l(PQ)$  par

$$l(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt \quad (13)$$

où,  $h(t)$  est une fonction monotone (d'interpolation de tailles) vérifiant  $h(0) = \|\overrightarrow{PP_1}\|$  et  $h(1) = \|\overrightarrow{QQ_1}\|$ , et en considérant une interpolation géométrique de taille sur l'arête  $PQ$ , on retrouve l'expression du H-choc correspondant au cas isotrope.

**Remarque.** L'avantage de cette approximation est que l'interpolation des métriques est remplacée par une interpolation de taille<sup>4</sup> sur un segment de  $R^3$ .

### 3.2 Correction en taille

Dans cette section, on va proposer deux approches pour borner la variation en taille d'un espace de contrôle, relatives à la mesure considérée (H-variation ou H-choc).

---

4. Notons que dans une structure riemannienne la variation de taille ne peut être imposée dans toutes les directions.



### 3.2.1 Hv-correction

La première approche est basée sur la mesure de H-variation et consiste à remplacer une spécification de taille par une autre réduite suivant toutes les directions. Dans le cas isotrope, la forme de la boule unité est par défaut conservée, mais sa taille devient plus petite, alors que dans le cas anisotrope, la boule unité change tout en restant incluse dans la boule initiale (cf. Figure 1 à gauche).

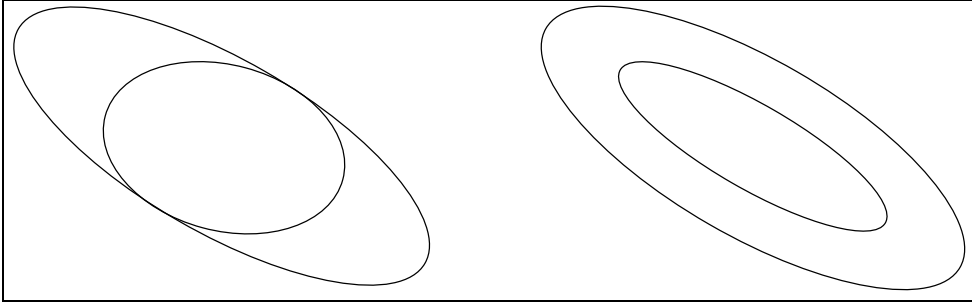


FIG. 1 - *Corrections de la boule unité.*

Dans le cas isotrope, le problème est de borner la H-variation  $v(PQ)$  d'une arête  $PQ$  par un seuil  $\alpha$  donné

$$v(PQ) = \frac{|h(Q) - h(P)|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \leq \alpha, \quad (14)$$

en modifiant les spécifications de tailles<sup>5</sup>  $h(P)$  et  $h(Q)$ . Les nouvelles spécifications en tailles sont alors données par

$$\begin{aligned} h(P) &= \min(h(P), h(Q) + \alpha\|\overrightarrow{PQ}\|) \\ \text{et } h(Q) &= \min(h(Q), h(P) + \alpha\|\overrightarrow{PQ}\|). \end{aligned} \quad (15)$$

Pour étendre ce résultat au cas général anisotrope, il suffit de généraliser l'opérateur min agissant sur des tailles à un opérateur relatif aux métriques. Dans [2], cet opérateur est l'opérateur intersection, noté  $(.,.)$ , qui donne une

---

5. En remarquant qu'une seule des deux spécifications change.

métrique dont la boule unité associée est la plus grande incluse dans l'une et l'autre des boules unité associées aux opérandes.

En remarquant que

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = l_P(PQ)h(P) = l_Q(PQ)h(Q), \quad (16)$$

où  $l_P(PQ)$  (resp.  $l_Q(PQ)$ ) est la longueur de  $PQ$  dans la métrique  $\mathcal{M}_d(P)$  (resp.  $\mathcal{M}_d(Q)$ ), alors l'équation (15) peut s'écrire

$$\begin{aligned} h(P) &= \min(h(P), h(Q)(1 + \alpha l_Q(PQ))) \\ \text{et } h(Q) &= \min(h(Q), h(P)(1 + \alpha l_P(PQ))) \end{aligned} \quad (17)$$

et en notant qu'une homothétie de taille de facteur  $\gamma$  est équivalente à une homothétie de métrique de facteur  $\gamma^{-2}$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d(P) &= (\mathcal{M}_d(P), \mathcal{M}_d(Q)(1 + \alpha l_P(PQ))^{-2}) \\ \text{et } \mathcal{M}_d(Q) &= (\mathcal{M}_d(Q), \mathcal{M}_d(P)(1 + \alpha l_Q(PQ))^{-2}). \end{aligned} \quad (18)$$

**Remarques.** La correction appliquée à une arête ne prend pas en compte l'interpolation de métriques le long de cette arête. En outre, l'intersection des métriques altère la forme des boules unité associées.

Par suite on propose un algorithme dit de *Hv-Correction* qui consiste à appliquer d'une manière itérative la correction aux arêtes du maillage  $T(\Omega)$

- boucle tant que la métrique en un point a été modifiée
  - boucle sur les arêtes de  $T(\Omega)$ 
    - Soit  $PQ$  l'arête en cours de traitement
    - Calculer  $l_P(PQ)$  (resp.  $l_Q(PQ)$ ) représentant la longueur de  $PQ$  dans la métrique  $\mathcal{M}_d(P)$  (resp.  $\mathcal{M}_d(Q)$ )
    - Calculer  $\gamma_P = 1 + \alpha l_P(PQ))^{-2}$  et  $\gamma_Q = 1 + \alpha l_Q(PQ))^{-2}$
    - Remplacer  $\mathcal{M}_d(P)$  (resp.  $\mathcal{M}_d(Q)$ ) par  $(\mathcal{M}_d(P), \gamma_P \mathcal{M}_d(Q))$  (resp.  $(\mathcal{M}_d(Q), \gamma_Q \mathcal{M}_d(P))$ ).

### 3.2.2 Hc-correction

La seconde approche est basée sur la mesure de H-choc et consiste à remplacer une spécification de taille par une autre réduite suivant toutes les directions tout en préservant la forme de la boule unité associée (cf. Figure 1 à droite).

Avant de présenter la procédure de correction, on donne quelques définitions relatives aux espaces de contrôle.

**Définitions.** Soient  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$  et  $(T(\Omega), \mathcal{M}'_d(T(\Omega)))$  deux espaces de contrôle discrets associés au même maillage  $T(\Omega)$  de  $\Omega$ . Ces deux espaces sont dits *proportionnels* si les métriques correspondantes sont proportionnelles, ou en d'autres termes si

$$\forall X \text{ sommet de } T(\Omega), \quad \exists \alpha_X \in R, \quad \mathcal{M}'_d(X) = \alpha_X \mathcal{M}_d(X). \quad (19)$$

Dans la mesure où, pour tout  $X$ ,  $\alpha_X \leq 1$ , l'espace de contrôle  $(T(\Omega), \mathcal{M}'_d(T(\Omega)))$  est appelé *réduction* de l'espace  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$ .

Ceci permet de définir une relation d'ordre sur les espaces de contrôle, que l'on désigne par  $<$ , et de reformuler l'assertion précédente par la relation

$$(T(\Omega), \mathcal{M}'_d(T(\Omega))) < (T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega))). \quad (20)$$

On va reformuler le problème de borner le H-choc en termes d'espaces de contrôle proportionnels.

**Problème.** Etant donné un espace de contrôle discret  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$ , le problème est de construire une réduction minimale (qui est par ailleurs maximale pour la relation d'ordre associée) de  $(T(\Omega), \mathcal{M}_d(T(\Omega)))$  dont le choc de H correspondant est borné par un seuil  $\beta$  donné.

Considérons, pour simplifier, le cas où le champ de métriques de l'espace de contrôle est isotrope. Soit  $PQ$  une arête de  $T(\Omega)$  de H-choc,  $c(PQ)$ , plus grand que le seuil  $\beta$ . Supposons que  $h(P) \leq h(Q)$ , le problème est alors de "réduire"  $h(Q)$  pour que le nouveau H-choc correspondant soit égal à  $\beta$ . Soient  $h'(Q)$  la nouvelle valeur de  $h(Q)$  après réduction et  $r$  tel que  $h'(Q) = r h(P)$ , alors  $r$  doit vérifier l'équation

$$\frac{h(P)}{\|\vec{PQ}\|} \frac{r \log^2(r)}{r-1} = \log(\beta). \quad (21)$$

La résolution de cette équation en  $r$  est non triviale, par suite, on en propose une solution approchée.

Comme  $h'(Q) \leq h(Q)$  alors  $l(PQ) \leq l'(PQ)$ , où  $l'(PQ)$  est la longueur de  $PQ$  calculée avec la nouvelle valeur  $h'(Q)$ . Soit  $c'(PQ)$  le nouveau H-choc sur  $PQ$  en prenant en compte  $h'(Q)$ . On a

$$c'(PQ) = \left( \frac{h'(Q)}{h(P)} \right)^{\frac{1}{l'(PQ)}} \leq \left( \frac{h'(Q)}{h(P)} \right)^{\frac{1}{l(PQ)}} = c(PQ) \eta^{\frac{1}{l(PQ)}} \quad (22)$$

où  $\eta = \frac{h'(Q)}{h(Q)}$ . Pour avoir  $c'(PQ) \leq \beta$ , il suffit que l'inéquation

$$c(PQ) \eta^{\frac{1}{l(PQ)}} \leq \beta \quad (23)$$

soit vérifiée, c'est-à-dire

$$\eta \leq \left( \frac{\beta}{c(PQ)} \right)^{l(PQ)}. \quad (24)$$

En résumé, pour que le H-choc sur l'arête  $PQ$  soit inférieur à  $\beta$  il suffit de réduire  $h(Q)$  (en supposant que  $h(P) \leq h(Q)$ ) d'un facteur<sup>6</sup>  $\eta$  inférieur à  $\left( \frac{\beta}{c(PQ)} \right)^{l(PQ)}$ . En prenant  $\eta$  égal à la valeur limite, la réduction correspondante approche la réduction minimale.

Le même raisonnement s'applique au cas général anisotrope si on considère le calcul approché de la longueur d'arête donnée par l'équation (13). Soient  $\mathcal{M}_d(P)$  (resp.  $\mathcal{M}_d(Q)$ ) la métrique en  $P$  (resp.  $Q$ ) et  $h(P)$  (resp.  $h(Q)$ ) la longueur unité suivant la direction  $\overrightarrow{PQ}$  au voisinage de  $P$  (resp.  $Q$ ). Supposons que  $h(P) \leq h(Q)$  et que le choc de H sur  $PQ$  soit plus grand que la valeur seuil  $\beta$ . Dans ce cas, la réduction consiste à remplacer  $\mathcal{M}_d(Q)$  par  $\frac{\mathcal{M}_d(Q)}{\eta^2}$  où  $\eta$  représente le facteur de réduction en taille correspondant au cas isotrope.

Par suite on propose un algorithme, dit de *Hc-Correction*, qui consiste à appliquer d'une manière itérative la réduction aux arêtes du maillage  $T(\Omega)$ .

---

6. Notons que cette borne pour  $\eta$  n'est pas optimale.

Cet algorithme s'écrit comme

- boucle tant que le H-choc sur une arête  $\geq \beta$ 
  - boucle sur les arêtes de  $T(\Omega)$ 
    - Soit  $PQ$  l'arête en cours de traitement
    - Calculer  $h(P)$  (resp.  $h(Q)$ ) représentant la longueur unité au voisinage de  $P$  (resp.  $Q$ ) suivant la direction  $\overrightarrow{PQ}$  (supposons que  $h(Q) \geq h(P)$ )
    - Calculer  $l(PQ)$  la longueur de  $PQ$
    - Calculer  $c(PQ)$  le H-choc sur  $PQ$
    - Si  $c(PQ) \geq \beta$  alors remplacer  $\mathcal{M}_d(Q)$  par  $\frac{\mathcal{M}_d(Q)}{\eta^2}$  avec
$$\eta = \left( \frac{\beta}{c(PQ)} \right)^{l(PQ)}.$$

## 4 Exemples

Dans cette section on montre quelques exemples de maillages adaptés à un espace de contrôle, ainsi qu'à des H-corrections correspondant à différents seuils imposés<sup>7</sup>. Ces exemples montrent, en particulier, l'effet de la H-correction sur la qualité du maillage résultant de l'adaptation ainsi que sur la vitesse de convergence de la boucle d'adaptation de maillage. Rappelons qu'en pratique le procédé d'adaptation de maillages est itéré jusqu'à l'obtention d'un maillage respectant (à priori) l'espace de contrôle relatif à l'itération suivante.

### 4.1 Exemples de maillages plans

On considère quatre exemples. Pour les deux premiers, l'espace de contrôle est défini d'une manière analytique. Quant aux deux derniers, l'espace de contrôle est déduit d'un estimateur d'erreur à partir de la solution d'un calcul classique d'écoulement fluide.

---

7. La plupart de ces maillages ont été générés par le mailleur adaptatif BL2D [4].

#### 4.1.1 Exemple 1

On considère un carré de longueur 4, centré à l'origine et on souhaite construire un maillage adapté à l'espace de contrôle isotrope *discontinu* qui à chaque point  $(x, y)$  du domaine associe la taille  $h(x, y)$  définie par

$$h(x, y) = \begin{cases} 0.005 & \text{si } 0.99 \leq r^2(x, y) \leq 1.01 \\ 1. & \text{si } 1.01 < r^2(x, y) \\ 0.1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (25)$$

où  $r^2(x, y) = x^2 + y^2$ . Ce champ impose une taille constante sur trois régions, un disque et deux anneaux. La variation en taille est constante presque partout sauf sur la frontière de ces régions où la variation est infinie.

La procédure d'adaptation est itérée, à partir d'un maillage grossier du carré, jusqu'à ce que le maillage correspondant soit adapté (à une tolérance donnée) au champ de tailles spécifié. L'espace de contrôle correspondant à chaque itération est composé du maillage généré à l'itération précédente et de la carte de tailles associée à ses sommets.

Comme l'espace de contrôle est discontinu et que le maillage initial est grossier, 20 itérations d'adaptation ont été nécessaires pour obtenir un maillage adapté à l'espace de contrôle (cf. Figure 2 en haut à gauche). Ce maillage comprend 10976 éléments. Sa qualité pire (resp. moyenne) est de 0.008 (resp. 0.8)<sup>8</sup>. Un agrandissement sur une zone critique (de discontinuité en taille) est illustré sur la Figure 2 (en bas à gauche). Les deux parties de la Figure 3 (en haut à gauche et en bas à gauche) montrent une conversion du maillage précédent en quadrangles (cf. [6]) ainsi que l'agrandissement sur la zone critique.

Par suite, on remplace à chaque itération, l'espace de contrôle correspondant par une réduction à H-choc  $\beta = 2$ . Dans ce cas, seulement 8 itérations d'adaptation ont été nécessaires pour obtenir un maillage adapté à l'espace de contrôle (cf. Figure 2 en haut à droite). Ce maillage comprend 28844 éléments. Sa qualité pire (resp. moyenne) est de 0.5 (resp. 0.9). Un agrandissement sur la même zone critique est illustré sur la Figure 2 (en bas à droite). La qualité du nouveau maillage adapté est meilleure, l'adaptation a convergée plus rapidement. Notons qu'un effet pervers de la réduction est que le maillage adapté

---

8. La mesure de qualité choisie varie de 0 (la plus mauvaise) à 1 (la meilleure).

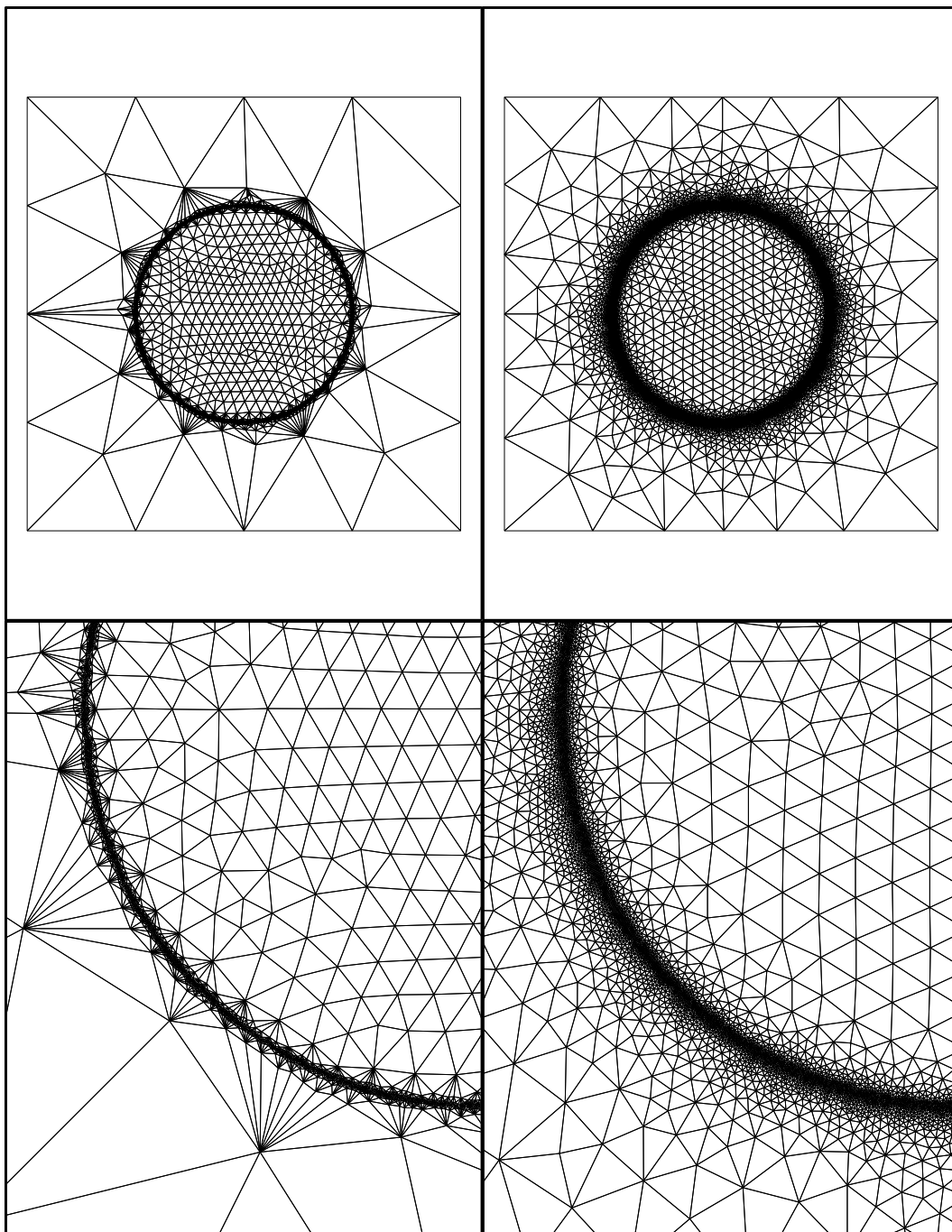


FIG. 2 - Maillage triangulaire adapté (isotrope) du carré sans et avec *H-Correction*.

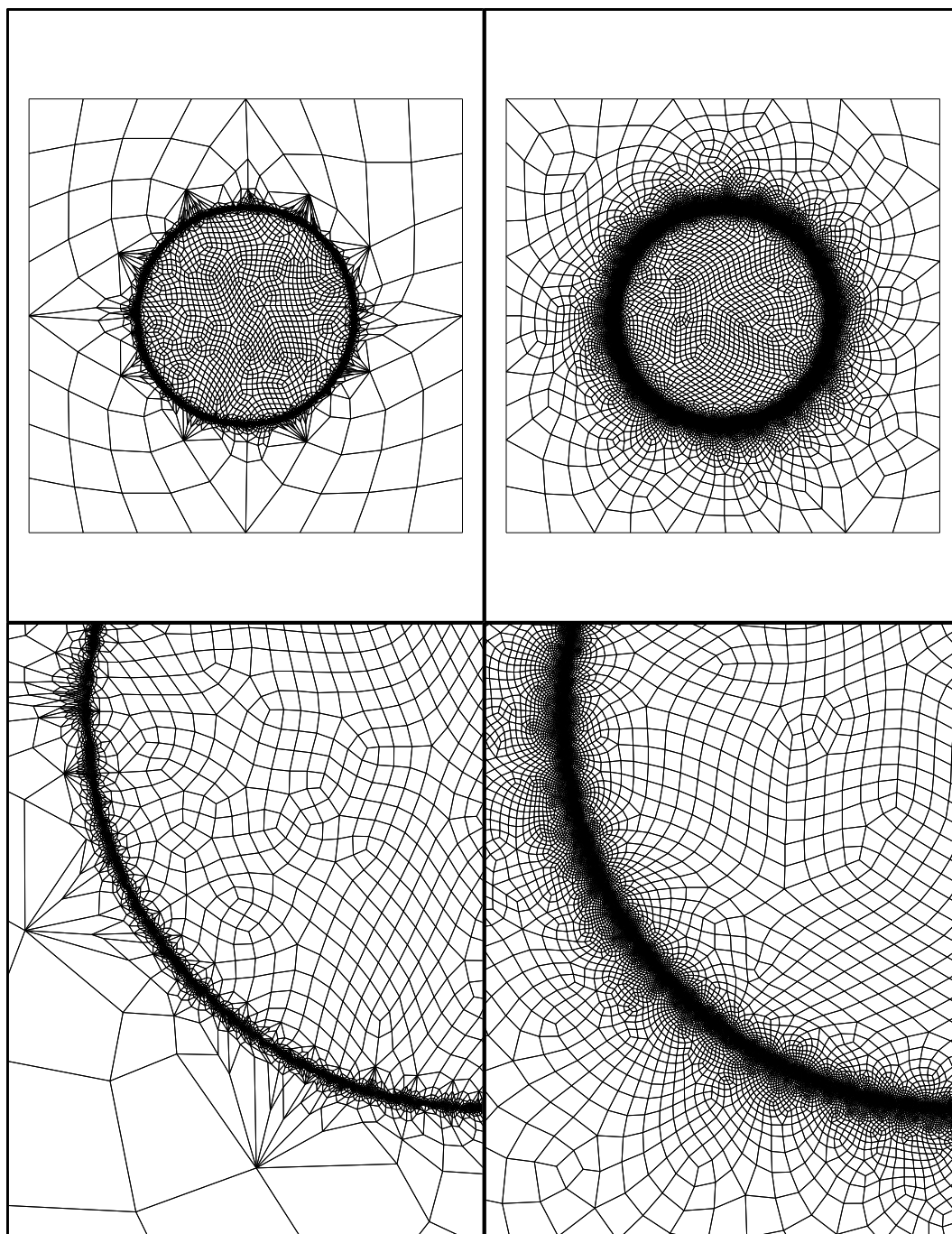


FIG. 3 - *Maillage quadrangulaire adapté (isotrope) du carré sans et avec H-Correction.*

RR n° 3199



correspondant comprend plus d'éléments, les longueurs d'arêtes du maillage sont en moyenne plus petites que un. Les deux parties de la Figure 3 (en haut à droite et en bas à droite) montrent la conversion du maillage adapté (à la réduction) en quadrangles ainsi que l'agrandissement sur la zone critique. Comme attendu, la qualité du maillage quadrangulaire est meilleure.

#### 4.1.2 Exemple 2

On reconsidère le domaine de l'exemple précédent et on souhaite construire un maillage adapté à l'espace de contrôle anisotrope qui à chaque point  $(x, y)$  du domaine associe la métrique  $\mathcal{M}(x, y)$  définie par

$$\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{R}(\theta(x, y)) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(x, y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(x, y)} \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}(\theta(x, y)) \quad (26)$$

où  $\mathcal{R}(\theta(x, y))$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta(x, y)$

$$\mathcal{R}(\theta(x, y)) = \begin{pmatrix} \cos \theta(x, y) & -\sin \theta(x, y) \\ \sin \theta(x, y) & \cos \theta(x, y) \end{pmatrix} \quad (27)$$

et

$$\begin{cases} \theta(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \\ h_1(x, y) = 0.0005 + 1.5 |1 - r(x, y)| \\ h_2(x, y) = 0.1 r(x, y) + 1.5 |1 - r(x, y)|. \end{cases} \quad (28)$$

Ce champ de métriques impose des tailles de 0.1 le long des tangentes au cercle  $r(x, y) = 1$  centré à l'origine et des tailles de 0.0005 dans les directions orthogonales, avec une variation vers une métrique isotrope (à mesure que l'on s'éloigne du cercle). L'étirement maximal imposé est donc 200 (au voisinage du cercle).

De même, la procédure d'adaptation est itérée, à partir d'un maillage grossier du carré, jusqu'à ce que le maillage correspondant soit adapté (à une tolérance donnée) au champ de tailles spécifié.

Comme la variation de métriques dans l'espace de contrôle est importante et que le maillage initial est grossier, 10 itérations d'adaptation ont été nécessaires

pour obtenir un maillage adapté à l'espace de contrôle (cf. Figure 4 en haut à gauche). Ce maillage comprend 1312 éléments. Sa qualité pire (resp. moyenne) est de 0.015 (resp. 0.5). Un agrandissement sur une zone où la variation de métrique est importante est illustré sur la Figure 4 (en bas à gauche). Les deux parties de la Figure 5 (en haut à gauche et en bas à gauche) montrent une conversion du maillage précédent en quadrangles ainsi qu'un agrandissement sur la zone critique.

On remplace à chaque itération, l'espace de contrôle correspondant par une réduction à H-choc  $\beta = 2$ . Dans ce cas, 5 itérations d'adaptation ont été nécessaires pour obtenir un maillage adapté à l'espace de contrôle (cf. Figure 4 en haut à droite). Ce maillage comprend 3082 éléments. Sa qualité pire (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.75). Un agrandissement sur la zone critique est illustré sur la Figure 4 (en bas à droite). De même, la qualité du nouveau maillage adapté est meilleure et l'adaptation a convergé plus rapidement. Les deux parties de la Figure 5 (en haut à droite et en bas à droite) montrent la conversion du maillage adapté (à la réduction) en quadrangles ainsi que l'agrandissement sur la zone critique. Remarquons aussi que la qualité du maillage quadrangulaire est meilleure.

### 4.1.3 Exemple 3

Nous traitons à présent une configuration classique d'un écoulement compressible Navier-Stokes. La résolution par éléments finis de ce problème est faite via le solveur NSC2KE [1] qui utilise une technique de volumes finis Galerkin avec les variables aux noeuds et un schéma d'intégration en temps de Runge-Kutta à 4 pas.

Il s'agit d'un écoulement supersonique autour d'un profil d'aile d'avion à Mach 2 et Reynolds 10000. Le nombre d'itérations du solveur étant fixé à 6000, une adaptation de maillage est appliquée toutes les 500 itérations. L'espace de contrôle est déduit d'un estimateur d'erreur basé sur le hessien de la solution. La Figure 6 montre le dernier maillage adapté correspondant à l'étape 6 d'adaptation qui comprend 58362 éléments. La qualité minimale (resp. moyenne) de ce maillage est 0.13 (resp. 0.92). La Figure 7 montre à la même étape d'adaptation, le maillage adapté à une réduction à H-choc  $\beta = 2$  de l'espace de contrôle associé, qui est composé de 68484 éléments. La qualité

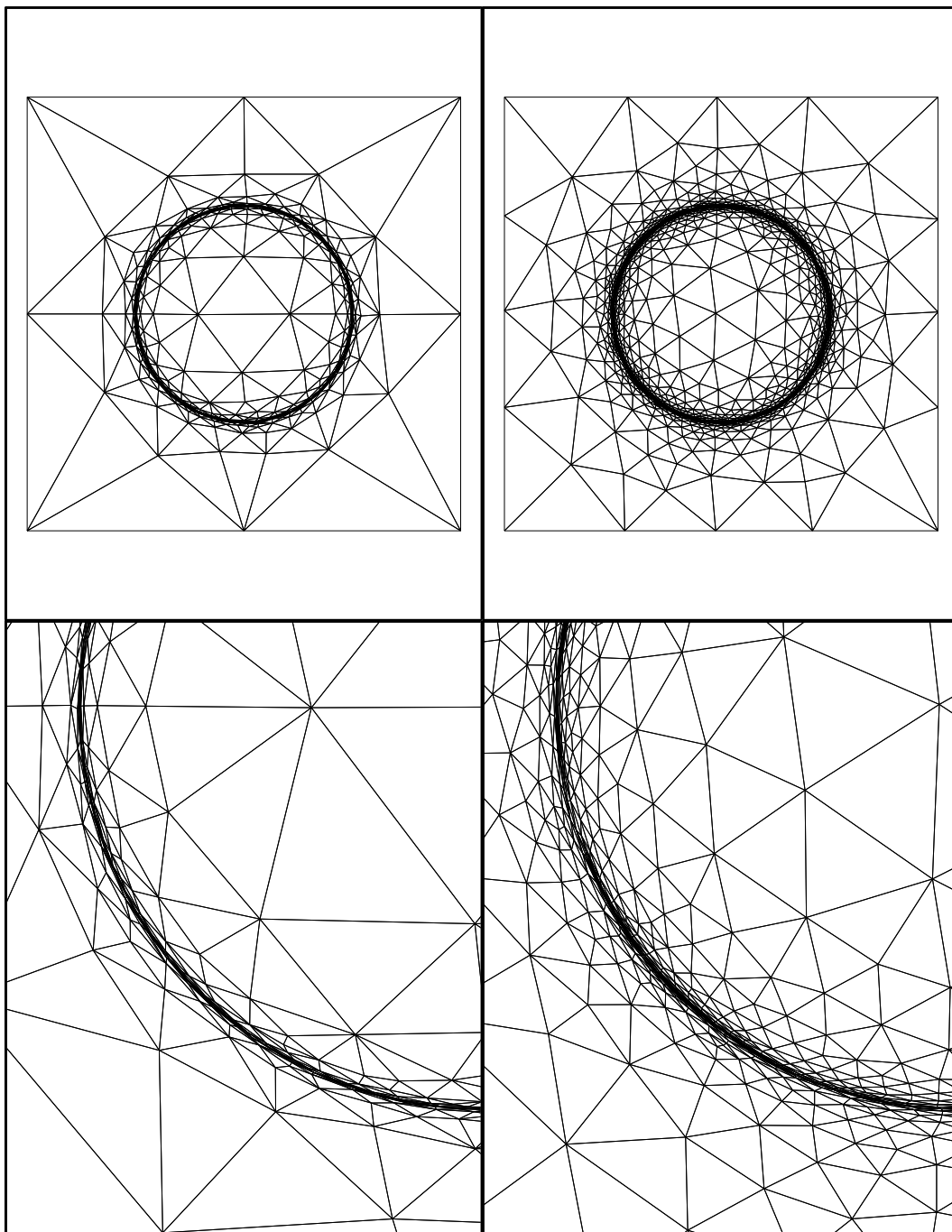


FIG. 4 - *Maillage triangulaire adapté (anisotrope) du carré sans et avec H-Correction.*

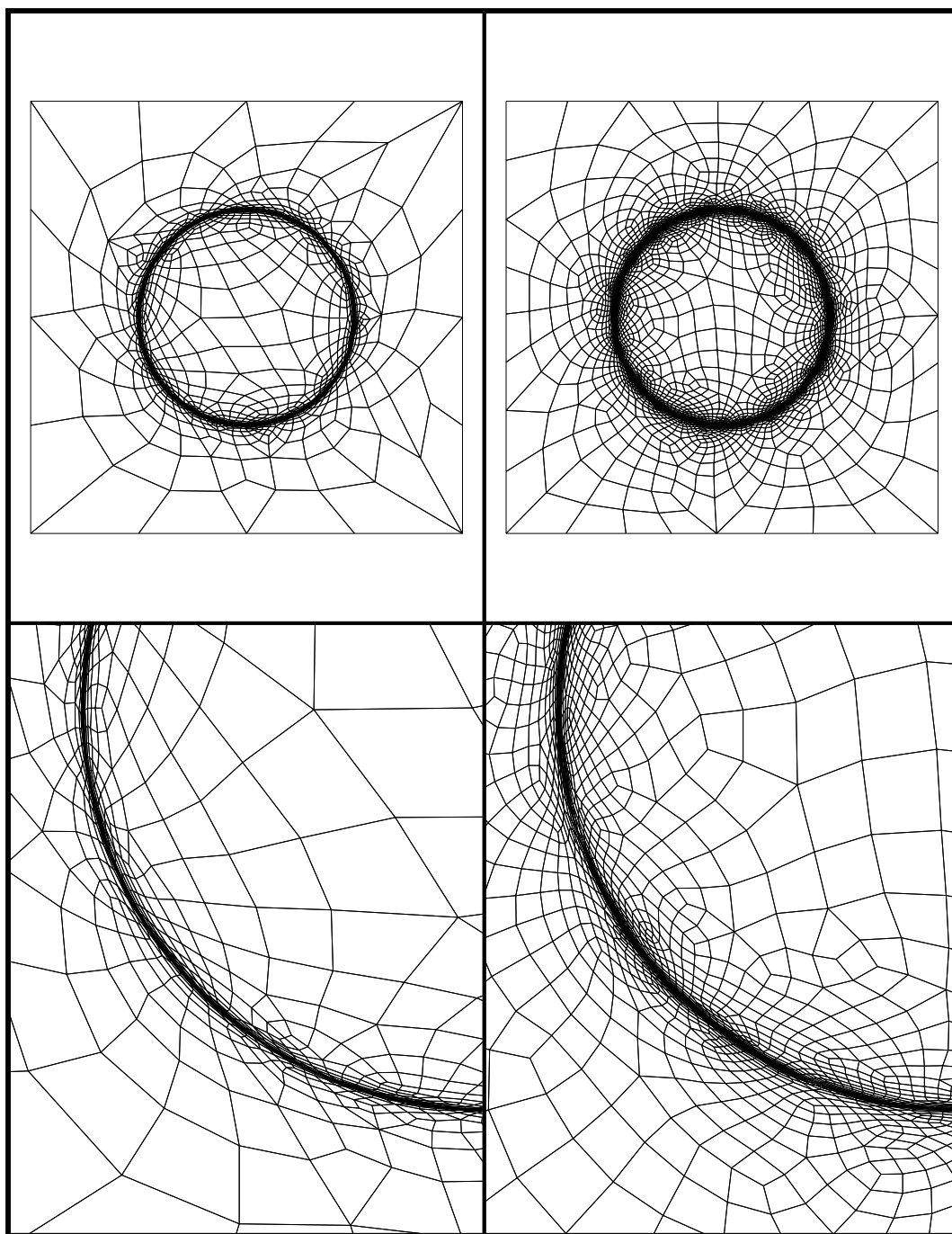
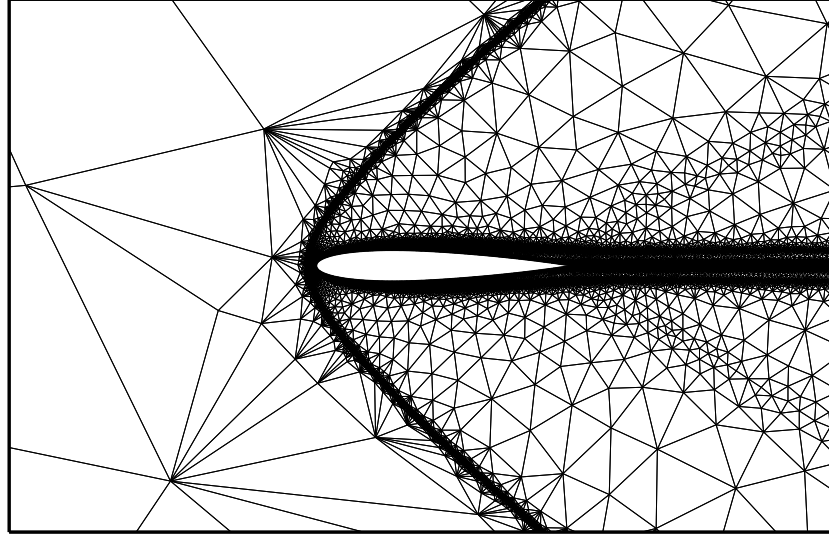


FIG. 5 - *Maillage quadrangulaire adapté (anisotrope) du carré sans et avec H-Correction.*

RR n° 3199

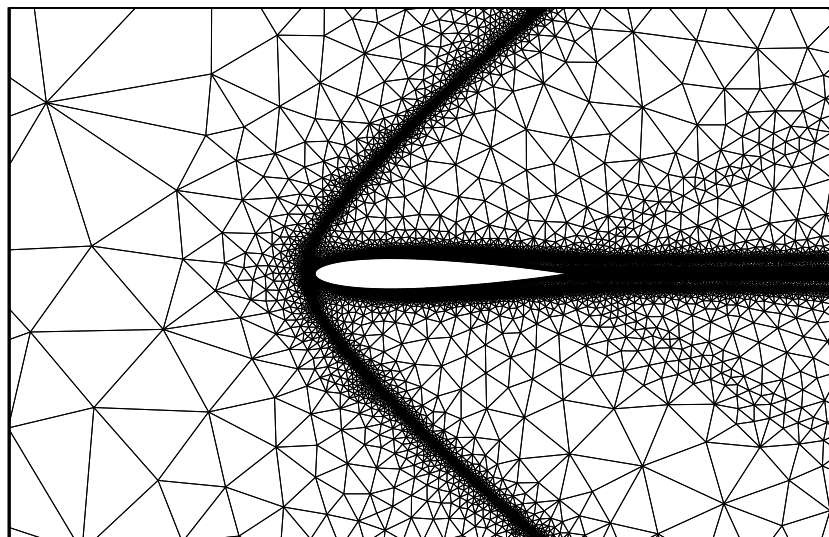
FIG. 6 - *Maillage adapté sans H-Correction.*

minimale (resp. moyenne) de ce maillage est 0.54 (resp. 0.94). Notons qu'il y a un gain en qualité de l'ordre de 4 moyennant un surplus d'éléments de facteur 1.7.

Dans la mesure où le solveur supporte les grandes variations de tailles, il vaut mieux, effectivement, ne pas corriger l'espace de contrôle (qui a pour conséquence une augmentation du temps de calcul). Dans le cas contraire, la correction permet d'améliorer la qualité du maillage et par conséquent de diminuer le degré des sommets (qui est utile pour le stockage de la matrice associée au calcul et pour sa transformation en une matrice bande).

#### 4.1.4 Exemple 4

Cet exemple représente une prédiction d'un écoulement instationnaire transonique autour d'une aile d'avion, avec "buffeting" [9]. Les paramètres (relatifs à l'écoulement) sont le nombre de Mach 0.775, un angle d'incidence de 4 degrés et le Reynolds  $10^7$ . Le nombre d'itérations du solveur est fixé à 200000 et le maillage est adapté toutes les 1000 itérations. Dans ce cas, les principales difficultés sont liées au probable manque d'information lors de l'interpolation

FIG. 7 - *Maillage adapté avec H-Correction.*

de solutions (sur le maillage adapté) et à la capture des régions de chocs évolutives. Pour cet exemple, une Hv-correction est appliquée, dans le but de raffiner le maillage dans les régions de chocs et de couches limites.

La Figure 8 montre le maillage adapté sans et avec Hv-correction de coefficient  $\alpha = 1.3$ . La Figure 9 illustre la chronologie de l'évolution de la zone du choc. La Figure 10 présente l'histogramme des nombres de sommets et de triangles jusqu'à l'étape 160 de l'adaptation. Les Figures 11 et 12 montrent les maillages aux étapes 150 (déplacement min) et 190 (déplacement max) de l'adaptation.

## 4.2 Exemple de maillages surfaciques

L'exemple considéré est une surface paramétrique par morceaux ayant 4 composantes connexes<sup>9</sup>. On souhaite construire un maillage isotrope et *géométrique* de cette surface. On montre dans [5] qu'un tel maillage doit être

---

9. Modèle de la théière de l'Utah.

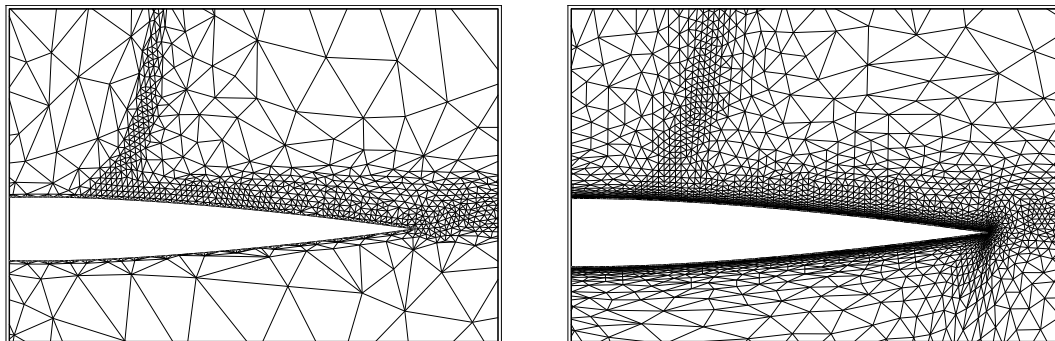


FIG. 8 - *Maillages de l'aile sans et avec Hv-correction.*

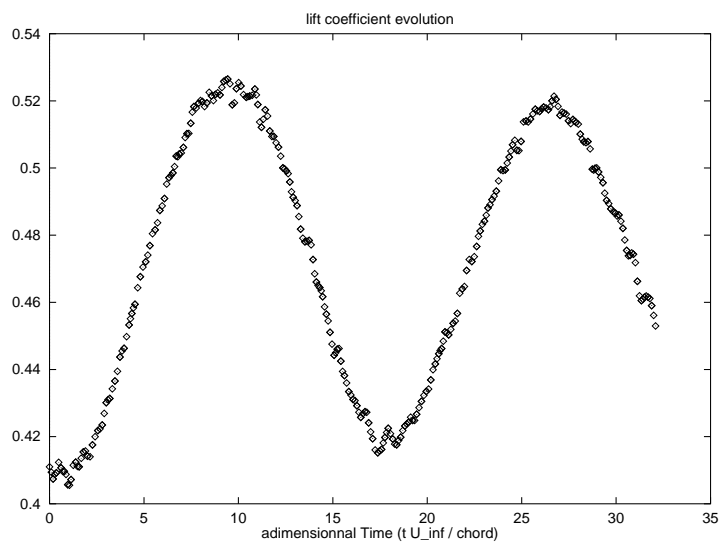


FIG. 9 - *Chronologie du déplacement de la zone du choc.*

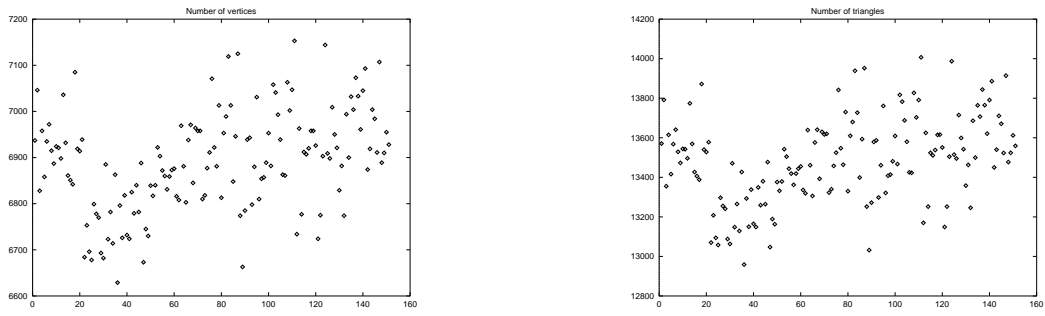


FIG. 10 - Variation du nombre de sommets et de triangles.

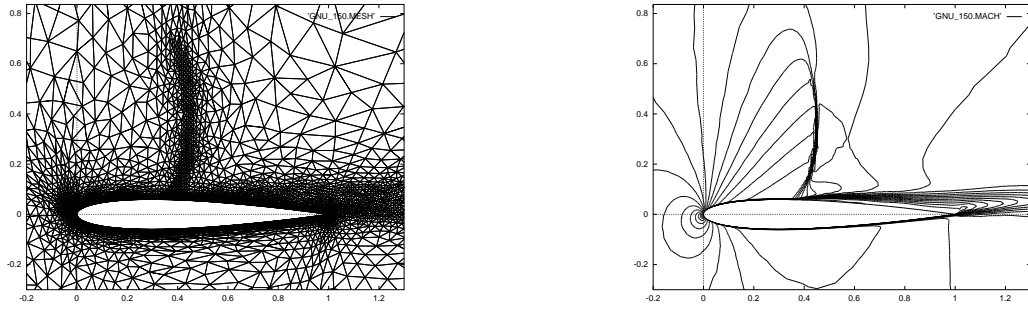


FIG. 11 - Maillage et iso-Mach au temps 0 (dép. min).

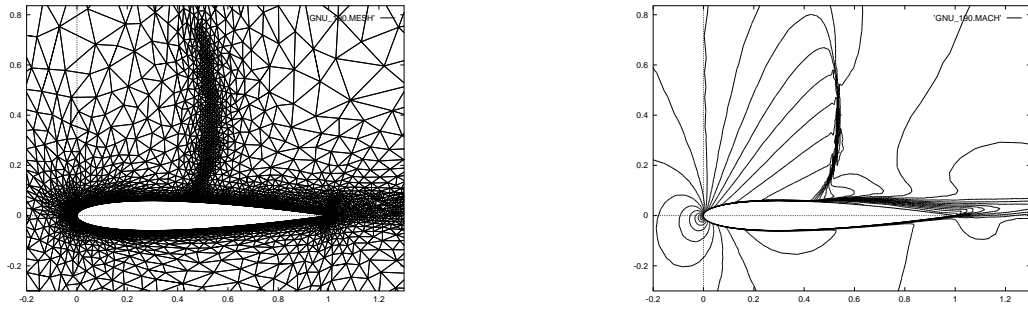


FIG. 12 - Maillage et iso-Mach au temps 8.78201 (dép. max).



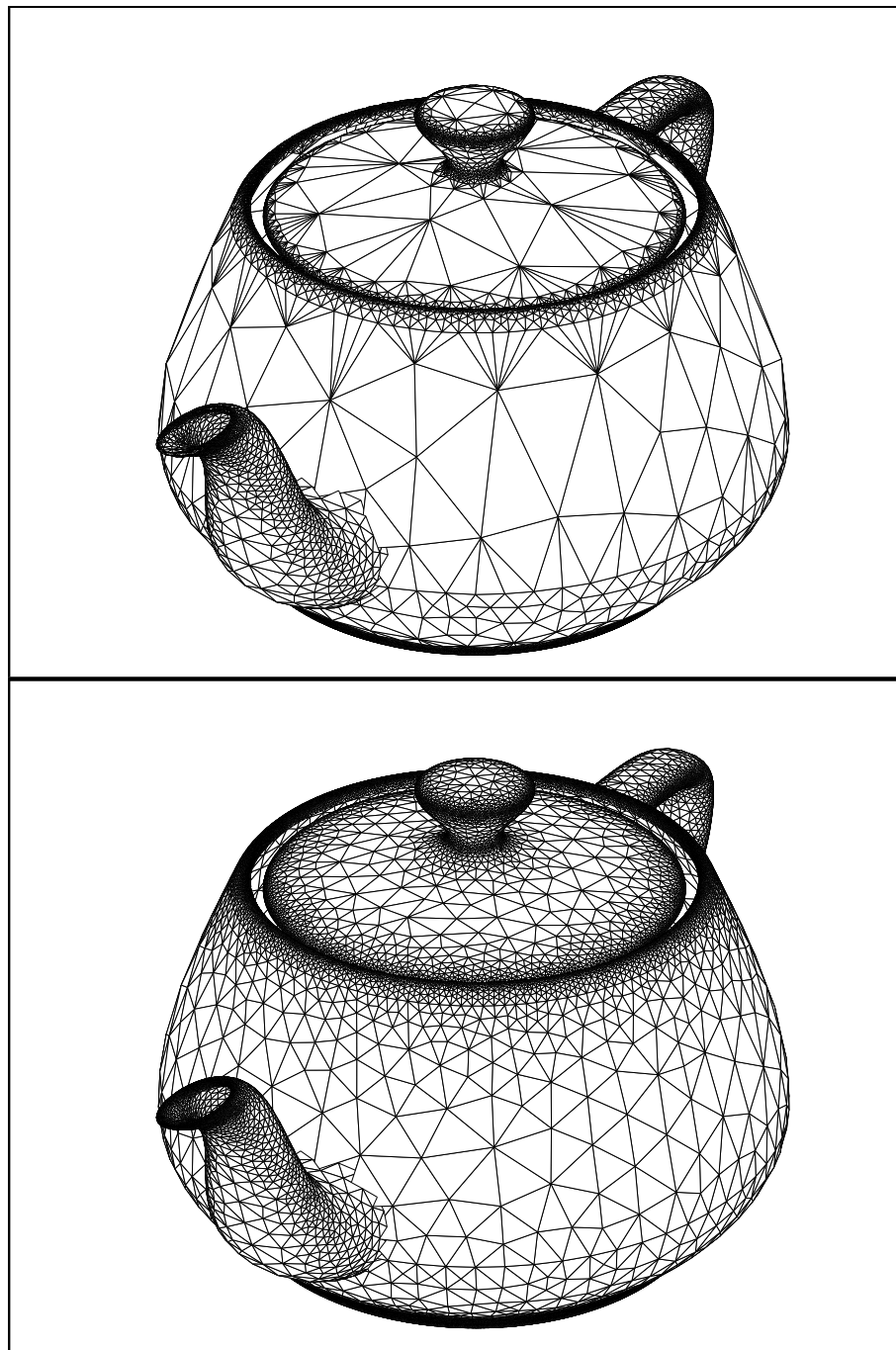


FIG. 13 - *Maillages géométriques de la théière, sans et avec H-Correction.*

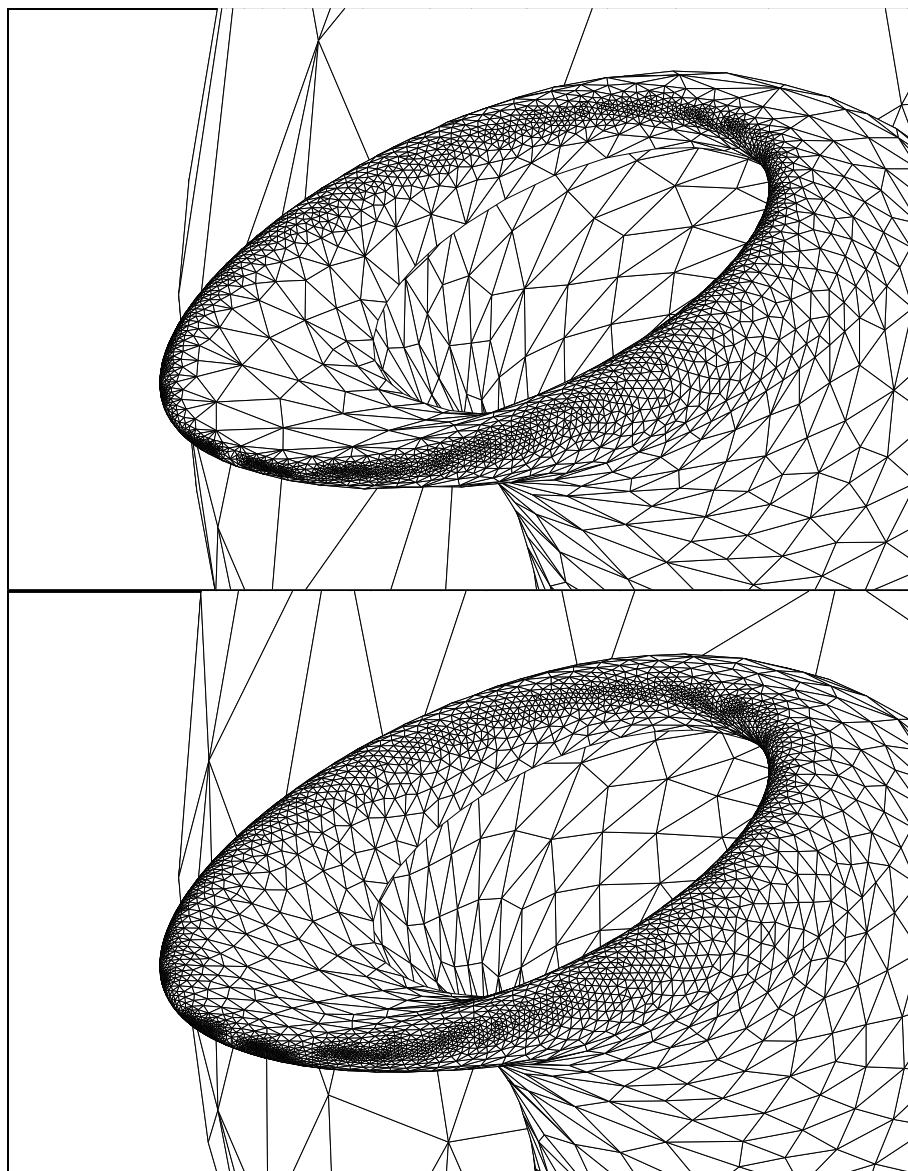


FIG. 14 - *Agrandissement des maillages du bec de la théière.*

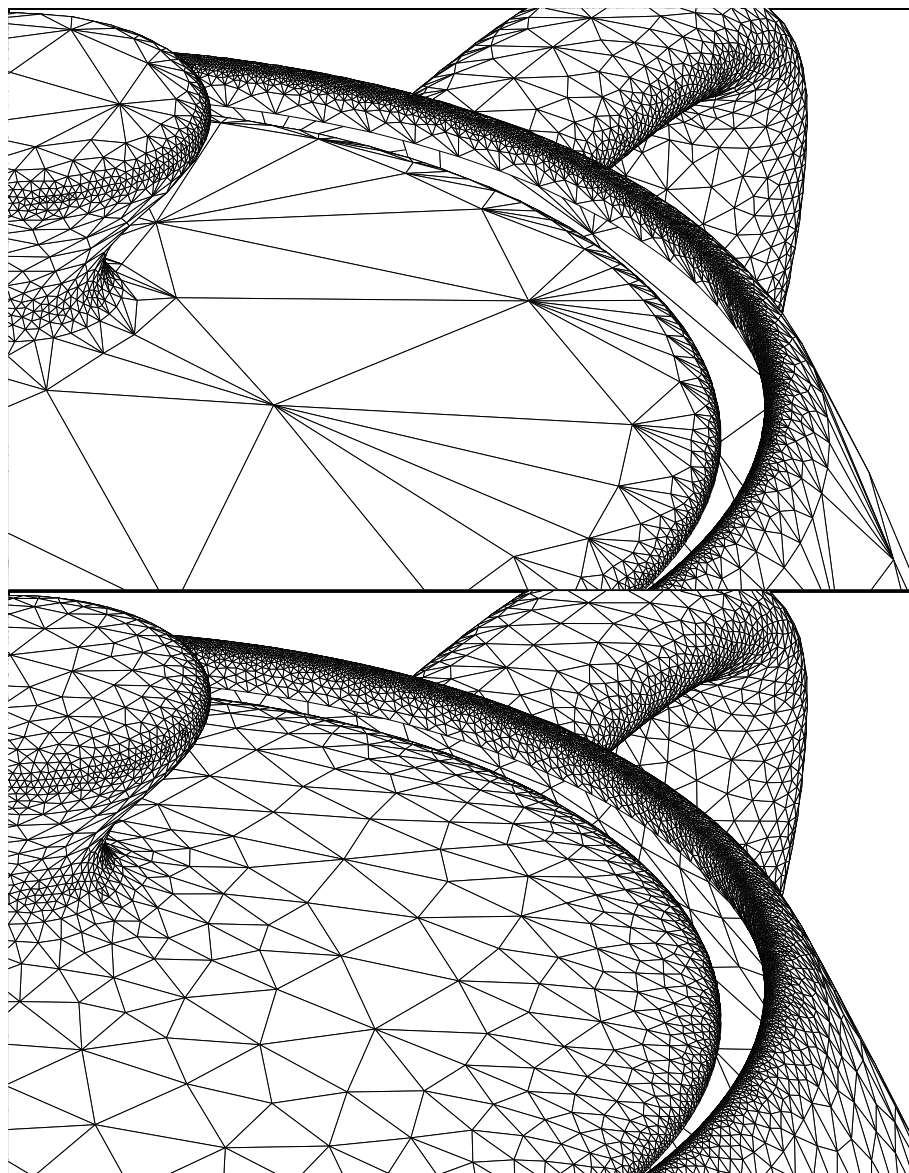


FIG. 15 - *Agrandissement des maillages du sommet de la théière.*

adapté au champ des rayons minimaux de courbure associé aux points de la surface.

Ainsi on définit un espace de contrôle discret composé d'un premier maillage (a priori quelconque de la surface) et de la carte des rayons de courbure minimaux associés aux sommets du maillage. La Figure 13 (en haut) montre le maillage adapté de la surface à l'espace de contrôle spécifié. La Figure 13 (en bas) montre le maillage adapté de la surface à une réduction de H-choc  $\beta = 1.5$  de l'espace de contrôle précédent. La qualité pire (resp. moyenne) du premier maillage adapté est 0.2 (resp. 0.8), tandis que la qualité pire (resp. moyenne) du deuxième maillage adapté est 0.6 (resp. 0.95). Ces mesures montrent clairement l'efficacité de la réduction sur la qualité du maillage adapté. Les Figures 14(en haut) et 15(en haut) montrent des agrandissements sur des zones où la variation de taille est importante. Les Figures 14(en bas) et 15(en bas) montrent des agrandissements de ces mêmes zones après H-correction.

**Remarque.** Ces maillages sont gouvernés par les propriétés intrinsèques de la surface et sont générés dans les espaces de paramètres associés au modèle, puis reportés sur la surface. Il est important de noter que l'isotropie du maillage résultant est liée à la forme des boules unité associées à l'espace de contrôle. Ainsi, la H-correction doit être une Hc-correction.

## 5 Conclusion

On a montré comment on peut, a priori, apporter une correction à un espace de contrôle pour borner la variation trop importante de taille et améliorer la qualité du maillage adapté à cet espace. Quelques exemples de maillages planaires et surfaciques ont montrés la pertinence de la méthode proposée.

Une recherche future consiste à déterminer explicitement la relation qui lie la variation en taille de l'espace de contrôle avec la qualité du maillage adapté correspondant et prendre en compte l'interpolation des tailles dans la correction.

## Références

- [1] B.MOHAMMADI, Fluid Dynamics Computation with NSC2KE – a User-Guide, Release 1.0, *INRIA, Rapport Technique* no 0164, 1994.
- [2] H.BOROUCHAKI, P.L.GEORGE, F.HECHT, P.LAUG AND E.SALTEL, Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part I: Algorithms., *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, pp. 61–83, 1997.
- [3] H.BOROUCHAKI, P.L.GEORGE AND B.MOHAMMADI, Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part II: Applications., *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, pp. 85–109, 1997.
- [4] H.BOROUCHAKI ET P.LAUG, Le mailleur adaptatif bidimensionnel BL2D : manuel d'utilisation et documentation, *INRIA, Rapport Technique* no 0185, 1995.
- [5] H.BOROUCHAKI ET P.L.GEORGE, Maillage des surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Série I, pp. 833–837, 1997.
- [6] H.BOROUCHAKI ET P.J.FREY, Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation, à paraître dans *Inter. J. Numer. Method Engng.*, 1997.
- [7] M.J.CASTRO-DÍAZ, F.HECHT, AND B.MOHAMMADI, New progress in anisotropic grid adaptation for inviscid and viscid flows simulation, *4th International Mesh Roundtable*, Albuquerque, New-Mexico, october 1995.
- [8] M.FORTIN, M.G.VALLET, J.DOMPIERRE, Y.BOURGAULT AND W.G.HABASHI, Anisotropic Mesh Adaption: Theory, Validation and Applications, *Eccomas 96, PARIS*, CFD book, pp. 174–199.
- [9] L.GIRODOUX AND J.C.LE BALLEUR, Time-consistent computation of transonic buffet over airfoils, *16 ICAS Jerusalem*, 1988.
- [10] M.G.VALLET, Génération de maillages Éléments Finis anisotropes et adaptatifs, *Thèse Université Paris VI*, Paris, 1992.
- [11] R.VERFÜRTH, A review of a posteriori error estimation and adaptive refinement techniques, *Wiley Teubner*, 1996.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399